

Paradox dvojčat v číslech

Prostorčasová vzdálenost

- v prostoročase lze zavést „pseudovzdálenost“, tzv. *prostorčasový interval*
- interval Δs^2 mezi dvěma událostmi je dán zobecněním Pythagorovy věty

$$\Delta s^2 = -\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = -\Delta t'^2 + \Delta x'^2 + \Delta y'^2 + \Delta z'^2$$
 ($\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta z$ jsou rozdíly souřadnic obou událostí v příslušné soustavě)
- interval je dán ve všech inerciálních soustavách stejným vzorcem
- interval zadává invariantní geometrii prostoročasu fundamentálnější než souřadné soustavy
- $\Delta s^2 < 0$ – události jsou kauzálně spojené $\Delta s^2 = -(\text{čas v soustavě, v níž jsou události soumísné})^2$
- $\Delta s^2 = 0$ – události jsou spojeny maximálním signálem (světlem)
- $\Delta s^2 > 0$ – události jsou akauzální $\Delta s^2 = (\text{vzdálenost v soustavě, v níž jsou události současné})^2$

Lorentzovy transformace

$$t' = \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}}$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}$$

transformace mezi souřadnicemi dvou inerciálních soustav
(analogie transformací mezi dvěma kartézskými soustavami v rovině)

Dilatace času

T_0 časový úsek prožítý pozorovatelem

T čas měřený v pohybuující se soustavě

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - v^2}}$$



Paradox dvojčat

- porovnání prožitého času různě se pohybuujících pozorovatelů
- měřeno mezi dvěma společnými událostmi
- nejvíc* času nažije *nejpříjemnější* pozorovatel = volný pozorovatel
- nejedná se pouze o „zdánlivý“ jev, o jakési fiktivní časy
- volný a urychlený pozorovatel nejsou ekvivalentní
- prožité časy obou pozorovatelů lze spočítat v libovolné soustavě

model pohybu konstantní rychlostí:

popis pozorovatele na **Zemi**

$$2T = \frac{2\tau}{\sqrt{1 - v^2}} > 2\tau$$

dilatace času

popis pozorovatele v **lodi**

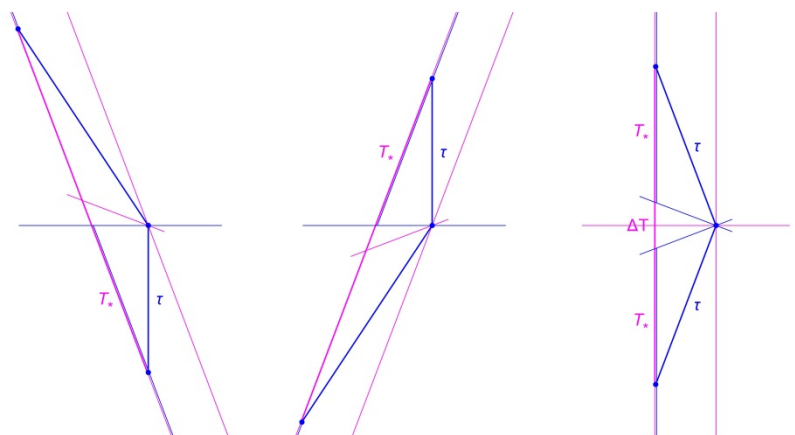
$$\tau = \frac{T_*}{\sqrt{1 - v^2}} > T_*$$

obrácená dilatace času

$$2T = T_* + T_* + \Delta T > 2\tau$$

celkový čas

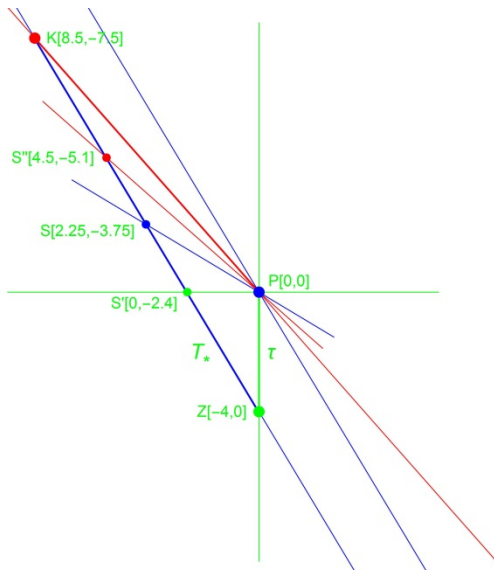
$$\frac{\Delta T}{2} = \frac{v^2}{\sqrt{1 - v^2}} \tau$$



Porovnání tří inerciálních soustav

- pozorovatel vzdalující se od Země
- pozorovatel na Zemi
- pozorovatel přibližující se k Zemi

- S' zelená rychlost vůči S : $v' = \frac{3}{5}$
- S modrá (rychlost v násobcích rychlosti světla)
- S'' červená rychlost vůči S : $v'' = -\frac{3}{5}$



$$|SZ| \text{ a } \tau \text{ jsou spojeny dilatací času } |SZ| = \frac{5}{4}\tau$$

$$\tau \text{ a } T_* \text{ jsou spojeny obrácenou dilatací času } \tau = \frac{5}{4}T_*$$

$$\tau = |PZ| = \sqrt{(0 - (-4))^2 - (0 - 0)^2} = 4$$

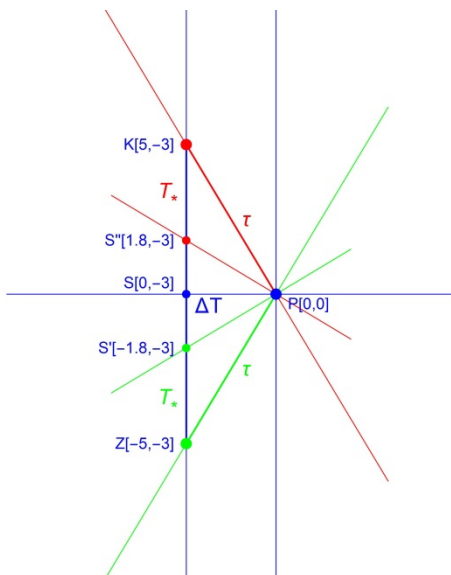
$$\tau = |PK| = \sqrt{(0 - 8.5)^2 - (0 - (-7.5))^2} = 4$$

$$T_* = |S'Z| = \sqrt{(0 - (-4))^2 - ((-2.4) - 0)^2} = 3.2$$

$$|SZ| = \sqrt{(2.25 - (-4))^2 - ((-3.75) - 0)^2} = 5$$

$$|KZ| = \sqrt{(8.5 - (-4))^2 - ((-7.5) - 0)^2} = 10 \quad \text{pozorovatel na Zemi}$$

$$|KPZ| = \tau + \tau = 8 \quad \text{pozorovatel na lodi}$$



$$t' = \frac{5}{4}t - \frac{3}{4}x \quad v' = \frac{3}{5} \quad \frac{1}{\sqrt{1-v'^2}} = \frac{5}{4}$$

$$x' = \frac{5}{4}x - \frac{3}{4}t$$

$$\tau = |PZ| = \sqrt{(0 - (-5))^2 - (0 - (-3))^2} = 4$$

$$\tau = |PK| = \sqrt{(0 - 5)^2 - (0 - (-3))^2} = 4$$

$$T_* = |S'Z| = \sqrt{((-1.8) - (-5))^2 - ((-3) - (-3))^2} = 3.2$$

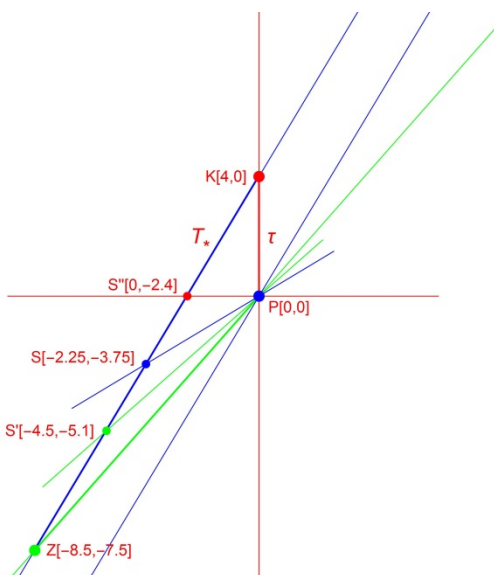
$$T_* = |S''K| = \sqrt{(1.8 - 5)^2 - ((-3) - (-3))^2} = 3.2$$

$$\Delta T = |S'S''| = \sqrt{((-1.8) - 1.8)^2 - ((-3) - (-3))^2} = 3.6$$

$$|KZ| = \sqrt{(5 - (-5))^2 - ((-3) - (-3))^2} = 10$$

$$= T_* + T_* + \Delta T = 10 \quad \text{pozorovatel na Zemi}$$

$$|KPZ| = \tau + \tau = 8 \quad \text{pozorovatel na lodi}$$



$$t'' = \frac{5}{4}t + \frac{3}{4}x \quad v'' = -\frac{3}{5} \quad \frac{1}{\sqrt{1-v''^2}} = \frac{5}{4}$$

$$x'' = \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}t$$

$$|SK| \text{ a } \tau \text{ jsou spojeny dilatací času } |SK| = \frac{5}{4}\tau$$

$$\tau \text{ a } T_* \text{ jsou spojeny obrácenou dilatací času } \tau = \frac{5}{4}T_*$$

$$\tau = |PK| = \sqrt{(0 - 4)^2 - (0 - 0)^2} = 4$$

$$\tau = |PZ| = \sqrt{(0 - (-8.5))^2 - (0 - (-7.5))^2} = 4$$

$$T_* = |S''K| = \sqrt{(0 - 4)^2 - ((-2.4) - 0)^2} = 3.2$$

$$|SK| = \sqrt{((-2.25) - 4)^2 - ((-3.75) - 0)^2} = 5$$

$$|KZ| = \sqrt{(4 - (-8.5))^2 - (0 - (-7.5))^2} = 10 \quad \text{pozorovatel na Zemi}$$

$$|KPZ| = \tau + \tau = 8 \quad \text{pozorovatel na lodi}$$